ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 2º semestre, Época Normal 08. 01. 2018

1ª Parte

1hora (10 valores)

Nome:____**nº:**_______

Espaço reservado para classificações				
1a.(15)	2a.(10)	3a. (10)	4. (15)	
1b.(10)	2b.(10)	3b. (15)		T:
	2 c.(15)			

Atenção: Todas as questões devem ser <u>devidamente formalizadas e justificadas</u>.

1. A função densidade conjunta da variável aleatória bidimensional (X, Y) é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{9} & 0 < x < 2, 0 < y < 3 \\ 0 & outros\ valores\ de\ (x,y) \end{cases}$$

a) Determine $f_Y(y)$, $f_{X|Y=2}(x)$ e obtenha o $E(X|Y=2)$.

$$f_Y(y) = \int_0^2 \frac{xy}{9} dx = \frac{y}{9} . \frac{x^2}{2} \bigg]_0^2 = \frac{2y}{9} \qquad (1 < y < 3)$$

$$f_{X|Y=2}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,2)}{f_Y(2)} = \frac{2x/9}{\frac{4}{9}} = \frac{x}{2} \qquad (0 < x < 2)$$

$$E(X|Y=2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x . f_{X|Y=2}(x) dx = \int_0^2 x . \frac{x}{2} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \bigg]_0^2 = \frac{4}{3}$$

b) Calcule $P(X > Y)$.

$$P(X > Y) = \int_0^2 \int_0^x \frac{xy}{9} dy dx = \int_0^2 \frac{x}{9} . \frac{y^2}{2} \bigg]_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^3}{18} dx = \frac{1}{18} \left(\frac{x^4}{4} \bigg]_0^2 \right)$$
$$= \frac{1}{18}(4) = \frac{2}{9}$$

2. Numa linha de montagem é produzido um certo tipo de peças a um ritmo médio de 20 por hora. A produção peças segue um processo de Poisson.

a) Qual a probabilidade de que sejam produzidas 8 ou mais peças em 15 minutos?
X −nº peças produzido por hora $\sim Po(20)$

$\Rightarrow X_{15}$ − nº peças produzido em 15 minutos $\sim Po(5)$

$P(X_{15} \geq 8) = 1 - P(X_{15} < 8) = 1 - F_{X_{15}}(8^-) = 1 - F_{X_{15}}(7) = 1 - 0.8666 = 0.1334$

b) Sabendo-se que uma peça já está a ser produzida há 2 minutos, qual a probabilidade de passarem ainda mais de 2 minutos até se completar a sua execução? Comente o resultado obtido.

X_1 − nº peças produzido em 1 minuto $\sim Po\left(\frac{1}{3}\right)$ ⇒tempo médio, em minutos, de produção de uma peça, $E(Y) = 3 = \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$

Y −tempo, em minutos, de produção de uma peça $\sim Ex(1/3)$

$P(Y > 4|Y > 2) = \frac{P(Y\geq 4)}{P(Y\geq 2)} = \frac{e^{-\frac{4}{3}}}{e^{-\frac{2}{3}}} = e^{-\frac{2}{3}}$ ou, aplicando a propriedade de falta de memória da exponencial $P(Y > 4|Y > 2) = P(Y > 2)$.

c) O operário encarregue da linha apostou com o colega que demorava no máximo 19 minutos a produzir 5 peças. Qual a probabilidade de ganhar a aposta?

$W = \sum_{i=1}^{5} Y_i$ −tempo, em minutos, de produção de 5 peças $\Rightarrow W \sim G(5, 1/3)$, então
$V = 2\lambda W \sim \chi^2_{(10)}$

$$P(W \leq 19) = P\left(V \leq 2 * \frac{1}{3} * 19\right) = P(V \leq 12.67) = 0.7571 \approx 0.75$$

3. O tempo que um estudante demora a resolver um exame é uma variável aleatória com distribuição normal de média 90 e variância 56,25 minutos.

a) Qual a probabilidade de um estudante demorar entre 90 e 110 minutos a resolver um exame?

X − tempo que um estudante demora a resolver um exame, $X \sim N(90, 56{,}25\ )$

$$P(90 < X \leq 120) = P\left(\frac{90-90}{\sqrt{56{,}25}} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{110-90}{\sqrt{56{,}25}}\right) = \Phi(2.67) - \Phi(0)$$

$$= 0{,}9962 - 0{,}5 \approx 0{,}4962$$

b) Seleccionados aleatoriamente 10 estudantes qual a probabilidade de menos de 6 resolverem o exame entre 90 e 110 minutos?

$Y -$ nº de estudantes, em 10, que resolvem o exame entre 90 e 110 minutos

$Y \sim Bi(10, 0.5)$ $P(Y < 6) = F_Y(6^-) = F_Y(5) = 0.6230$

4. Se $X_1, X_2, \cdots, X_k$ são variáveis aleatórias independentes e $X_i \sim Ex(\lambda)$, prove que $Y = min\{X_i\} \sim Ex(k\lambda)$. Justifique todos os passos do seu raciocínio.

$$F_Y(Y) = P(Y \leq y) = P(min\{X_i\} \leq y) = 1 - P(min\{X_i\} > y) =$$

$$= 1 - \underbrace{P(X_1 > y \wedge X_2 > y \wedge \cdots \wedge X_k > y)}_{porque\ X_i\ independentes} = \underbrace{1 - [P(X > y)]^k}_{porque\ X_i\ i.d.a\ X} 1 - \ 1 - [1 - F_X(x)]^k =$$

$$1 - \left[1 - \left(\underbrace{1 - e^{-\lambda x}}_{porque\ X \sim Ex(\lambda)}\right)\right]^k = 1 - \left(e^{-\lambda x}\right)^k$$

$$= \underbrace{1 - e^{-k\lambda x}}_{f.d.prob.de\ uma\ exponencial\ de\ parâmetro\ k\lambda} \Rightarrow Y \sim Ex(k\lambda)$$